

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 4

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/5, & 1 \leq x < 4 \\ 3/4, & 4 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x. \end{cases}$$

- Skizziere die Verteilungsfunktion.
- Berechne die zugehörige Gewichtsfunktion und skizziere diese.
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X = 6), \mathbb{P}(X = 5), \mathbb{P}(2 < X < 5.5), \mathbb{P}(0 \leq X < 4).$$

- Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und die Standardabweichung $\text{sd}(X)$.

2. Der kleine Diego darf seine Eltern zu einer Party begleiten. Bei solchen Gelegenheiten möchte Diego jeweils so lange wie möglich wach bleiben. Sein Durchhaltevermögen (wach bleiben in Stunden ab Partybeginn um 20 Uhr) werde durch die Zufallsvariable T mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 - \exp(-t/3), & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

beschrieben.

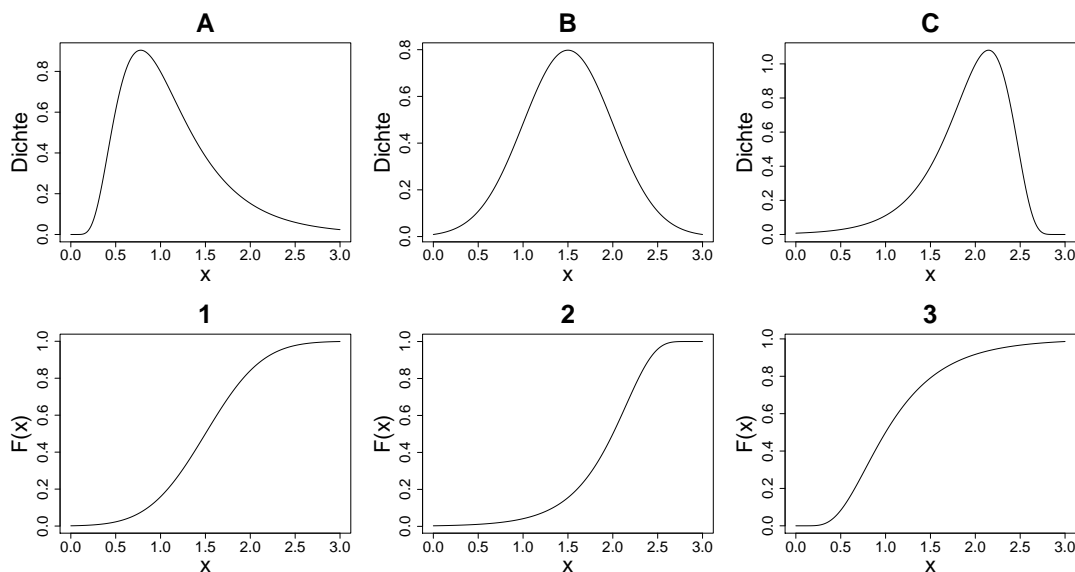
- Prüfe, ob es sich bei F wirklich um eine Verteilungsfunktion handelt.
- Hat F eine Dichte? Wenn ja, wie lautet diese?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diego vor Mitternacht einschläft?
- Um welche Uhrzeit beträgt die Wahrscheinlichkeit genau 50%, dass Diego bereits eingeschlafen ist (*bei der gesuchten Uhrzeit handelt es sich um den Median der Zufallsvariable T*)?

3. In der Stadt Zürich gibt es bekanntlich viele Baustellen. Die Dauer X der Arbeiten bei einer Baustelle liege zwischen 0 und 20 Wochen. Die Dichte f der Zufallsvariable X habe die Form

$$f(x) = \begin{cases} c - \frac{c}{20}x, & \text{falls } x \in [0, 20], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Welchen Wert muss c annehmen und warum?
- Berechne die kumulative Verteilungsfunktion und skizziere diese.
- Bestimme mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit X
 - maximal 5 Wochen beträgt,
 - zwischen 5 und 10 Wochen beträgt.
- Berechne den Erwartungswert und den Median der Dauer X .
- Welche Dauer wird nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% überschritten?
- $K = 40'000 \cdot \sqrt{X}$ entspreche dem Betrag in Franken, den die Arbeiten bei einer Baustelle kosten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeiten bei einer Baustelle höchstens 120'000 Franken kosten?

4. Betrachte die folgenden Darstellungen.



Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

- Die richtige Zuordnung zwischen Dichte und kumulativer Verteilungsfunktion F ist: A3, B1, C2.

- b) Für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte aus Abbildung C gilt, dass $P[X = 2] > P[X = 1]$.
- c) Für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte aus Abbildung B gilt, dass der Erwartungswert bei 1.5 liegt.
- d) Die kumulative Verteilungsfunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.
- e) Die Dichtefunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.